移流方程式の解法

移流方程式 (１階の波動方程式)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

の数値解法として有名な２つの解法 Lax–Wendroff scheme と Leap-frog scheme を学ぶ。

1 Lax–Wendroff Scheme

Taylor 展開より，解 $u(x,t)$ は

$$u(x,\,t+\Delta t) = u(x,\,t) + \Delta t\,u_t(x,\,t) + \frac{1}{2}\,\Delta t^2\,u_{tt}(x,\,t) + \mathrm{O}\left(\Delta t^3\right)$$

となる。ここに $u_t = -c\,u_x$, $u_{tt} = c^2\,u_{xx}$ を代入すると

$$u(x,\,t+\Delta t) = u(x,\,t) - c\,\Delta t\,u_x(x,\,t) + \frac{1}{2}\,\Delta t^2\,c^2\,u_{xx}(x,\,t) + \mathrm{O}\left(\Delta t^3\right) \tag{2}$$

となる。上式において $\mathrm{O}\left(\Delta t^3\right)$ の項を無視し

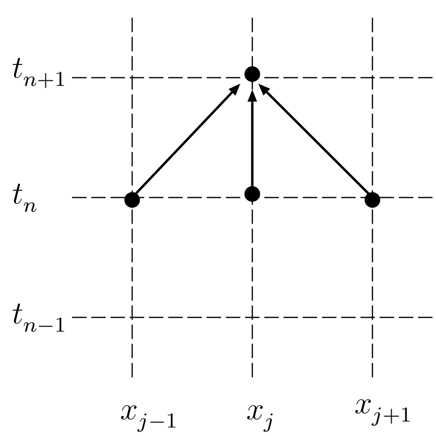
$$u_x(j\,\Delta x,\,n\,\Delta t) \simeq \frac{u(x_{j+1},t_n) - u(x_{j-1},t_n)}{2\,\Delta x} \to \frac{u^n_{j+1} - u^n_{j-1}}{2\,\Delta x},$$

$$u_{xx}(j\,\Delta x,\,n\,\Delta t) \simeq \frac{u(x_{j+1},t_n) - 2\,u(x_j,t_n) + u(x_{j-1},t_n)}{\Delta x^2} \to \frac{u^n_{j+1} - 2\,u^n_j + u^n_{j-1}}{\Delta x^2}$$

という近似を代入すると

$$u^{n+1}_j = \frac{1}{2}\,\rho\,(\rho-1)\,u^n_{j+1} + (1-\rho^2)\,u^n_j + \frac{1}{2}\,\rho\,(\rho+1)\,u^n_{j-1} \tag{3}$$

を得る。ここで $\rho = c\,\Delta t/\Delta x$ と置いた。この scheme (アルゴリズム) を Lax–Wendroff scheme と呼ぶ。



Lax–Wendroff scheme (3) の格子

次に Lax–Wendroff scheme の安定解析を行う。いつものように

$$u_j^n = g^n \exp(\mathrm{i}\,\xi\, j\,\Delta x)$$

と置き，式 (3) に代入すると

$$g = 1 - 2\,\rho^2\,\sin^2\left(\frac{\xi\,\Delta x}{2}\right) - \mathrm{i}\,\rho\,\sin(\xi\,\Delta x)$$

を得る。これより

$$|g|^2 = 1 - 4\,\rho^2\,(1-\rho^2)\,\sin^4\left(\frac{\xi\,\Delta x}{2}\right)$$

となるので，$|\rho| < 1$ であれば $|g| < 1$ となり安定になる。すなわち CFL 条件が安定条件でもある。

2 Leap-frog scheme

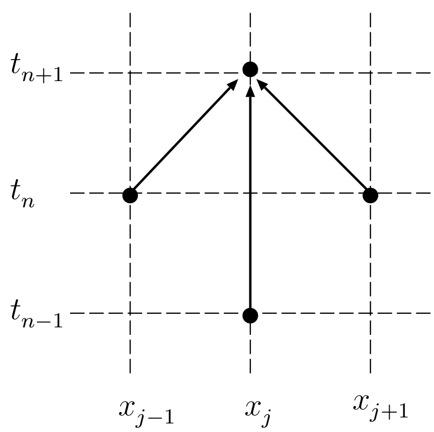
これは，これまでの解法と異なり，時間ステップに関しては二段階の値を用いる解法である。時間と空間に関する偏微分をそれぞれ

$$\frac{\partial u}{\partial t} \simeq \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\,\Delta t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,\Delta x}$$

で近似すると，

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \rho\,(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \tag{4}$$

という差分解法が得られる。これが Leap-frog scheme である。



Leap-frog scheme (4) の格子

この解法では，スタート時点で二段階の近似 u_j^0 と u_j^1 が必要になる。このうち，u_j^0 は初期値そのものを用いればよいが，u_j^1 は他の方法で計算しなければならない。通常は，Lax–Wendroff scheme のようにこの scheme と同じ近似度を持つ解法を用いて決定する。

次に Leap-frog scheme の安定性解析を行う。前と同様

$$u_j^n = g^n \exp(\mathrm{i}\,\xi\, j\,\Delta x)$$

と置いたものを (4) に代入した結果,

$$g^2 + 2\,\mathrm{i}\,\rho\,\sin(\xi\,\Delta x)\,g - 1 = 0 \tag{5}$$

を得る。これを g について解くと

$$g_1,\, g_2 = -\mathrm{i}\,\rho\,\sin(\xi\,\Delta x) \pm \sqrt{1 - \rho^2\,\sin^2(\xi\,\Delta x)}$$

という 2 つの根をもつことになる。ここで $|\rho| \le 1$ を仮定すれば，上の 2 つの根は複素根になり

$$|g_1|^2 = |g_2|^2 = 1$$

であるから，この解法は安定になる。

二階の波動方程式の解法

二階の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

の解法を考える。まず考えられるのは

$$u_j^{n+1} - 2\,u_j^n + u_j^{n-1} = \rho^2\,(u_{j+1}^n - 2\,u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{7}$$

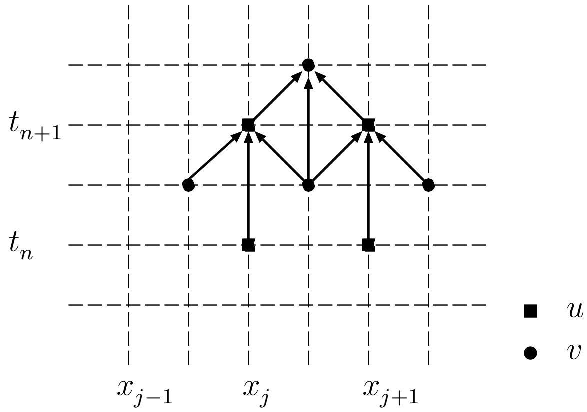
という差分法である。ここで $\rho = c\,\Delta t/\Delta x$ である。この解法は $|\rho| < 1$ のとき安定になる。この解法も時間ステップに関して二段階の値が必要になる。

一方，方程式 (6) と等価な連立偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial t} + c\,\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \tag{8}$$

を Leap-frog scheme で解くことも考えられる。

$$\begin{cases} \dfrac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\,\dfrac{v_{j+1/2}^{n+1/2} - v_{j-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x} = 0 \\[2ex] \dfrac{v_{j+1/2}^{n+3/2} - v_{j+1/2}^{n+1/2}}{\Delta t} + c\,\dfrac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x} = 0 \end{cases} \tag{9}$$



Leap-frog scheme (9) の格子

問題 偏微分方程式 (6) と連立偏微分方程式が (8) 等価であることを示せ。

問題 数値解法 (7) は $|\rho| < 1$ であれば安定であることを示せ。

http://www.pna.eis.akita-pu.ac.jp/~ozawa/Lecture/Grad_Schl/HandOut07.pdf