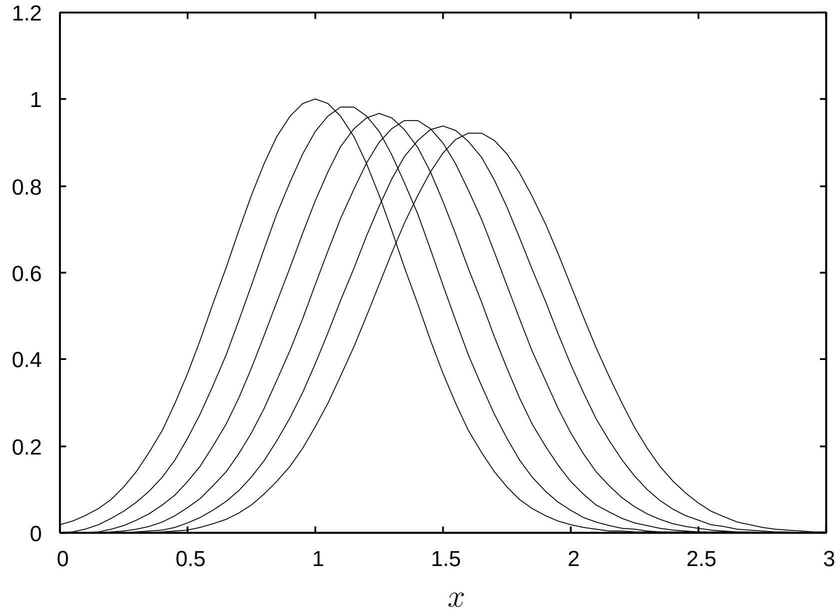
Up-wind scheme と Lax–Wendroff shceme との比較

方程式

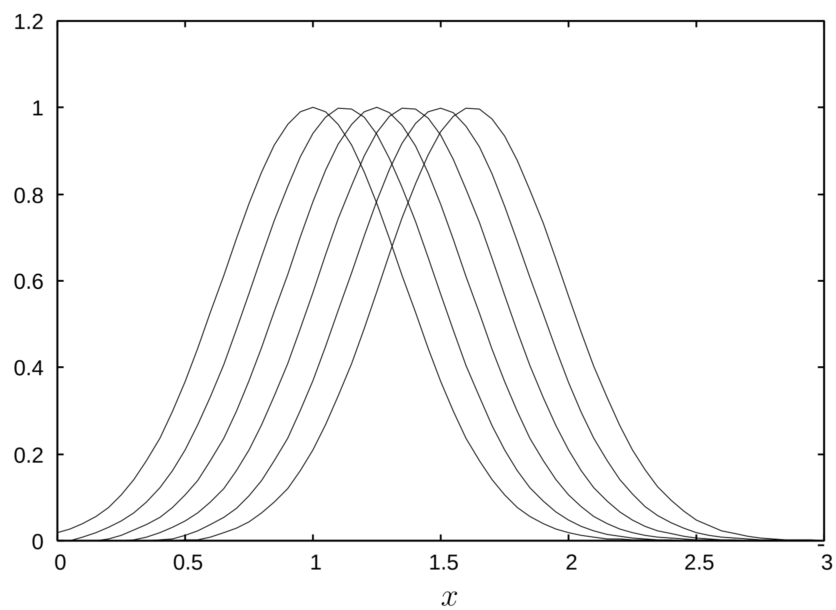
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

を Up-wind scheme と Lax–Wendroff scheme で解いた結果を比較する。

1. $u(x,0) = \mathrm{e}^{-4(x-1)^2}$ の場合

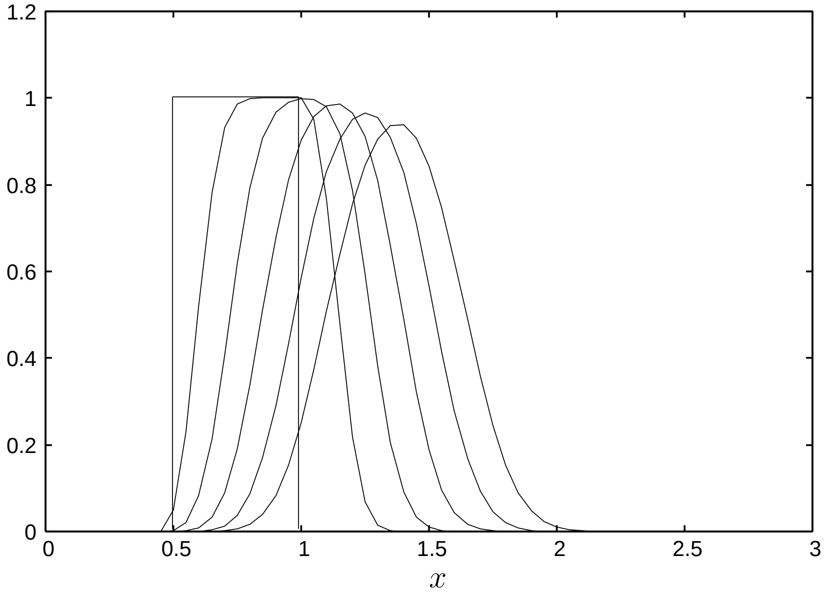


Up-wind scheme $\left(\text{左から右へ } t = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8} \, (\Delta t = 1/64, \Delta x = 1/20)\right)$



Lax-Wendrof scheme $\left(\text{左から右へ } t = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8} \, (\Delta t = 1/64, \Delta x = 1/20)\right)$

2. $u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0.5 \le x \le 1.0, \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$ の場合



Up-wind scheme $\left(\text{左から右へ } t = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}\,(\Delta t = 1/64, \Delta x = 1/20)\right)$

問題 1 移流方程式 (1) を二番目の初期関数のもとで Lax–Wendroff scheme を用いて解け。

Lax–Wendroff Scheme の導出 (2)

方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

のための Lax–Wendroff scheme を導出する。まず $a(u) = \partial f(u)/\partial u$ と置くと，方程式 (2) は

$$u_t + f_x = u_t + a\, u_x = 0 \tag{3}$$

となる。この方程式より

$$\begin{aligned} u_t &= -f_x \\ u_{tt} &= -f_{xt} = -f_{tx} = -(a\, u_t)_x = (a\, f_x)_x \end{aligned}$$

という関係が得られる。これらを Taylor 展開

$$u(x, t+\Delta t) = u(x,t) + \Delta t\, u_t(x,t) + \frac{1}{2}\,\Delta t^2\, u_{tt}(x,t) + \mathrm{O}(\Delta t^3) \tag{4}$$

に代入すると

$$u(x, t+\Delta t) = u(x,t) - \Delta t\, f_x + \frac{1}{2}\,\Delta t^2\,(a\, f_x)_x + \mathrm{O}(\Delta t^3) \tag{5}$$

となる。上式に含まれる偏導関数 f_x および $(a\, f_x)_x$ を差分で近似し，それぞれに以下のような置き換えを行う:

$$(f(u))_x \simeq \frac{f(u(x+\Delta x, t)) - f(u(x-\Delta x, t))}{2\,\Delta x} \to \frac{F^n_{j+1} - F^n_{j-1}}{2\,\Delta x} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} (a\, f_x(u))_x &\simeq \left(a(u(x,t))\, \frac{f(u(x+\Delta x/2, t)) - f(u(x-\Delta x/2, t))}{\Delta x} \right)_x \\ &\simeq \frac{1}{\Delta x^2} \Bigg(a(u(x+\Delta x/2, t))\, \Big(f(u(x+\Delta x, t)) - f(u(x,t)) \Big) \\ &\qquad - a(u(x-\Delta x/2, t))\, \Big(f(u(x,t)) - f(u(x-\Delta x, t)) \Big) \Bigg) \\ &\to \frac{1}{\Delta x^2} \Big(A^n_{j+1/2}\,(F^n_{j+1} - F^n_j) - A^n_{j-1/2}\,(F^n_j - F^n_{j-1}) \Big) \end{aligned} \tag{7}$$

ここで

$$\begin{aligned} F^n_j = f(u^n_j), &\qquad F^n_{j\pm1} = f(u^n_{j\pm1}), \\ A_{j\pm1/2} = a(u_{j\pm1/2}), &\qquad u_{j\pm1/2} = \frac{1}{2}\,(u^n_j + u^n_{j\pm1}) \end{aligned}$$

と置いた。これより以下のような scheme が得られる:

$$\begin{aligned} u^{n+1}_j &= u^n_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\,(F^n_{j+1} - F^n_{j-1}) + \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} \Big(A^n_{j+1/2}\,(F^n_{j+1} - F^n_j) - A^n_{j-1/2}\,(F^n_j - F^n_{j-1}) \Big) \\ &= u^n_j - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} A^n_{j+1/2}\right)(F^n_{j+1} - F^n_j) + \left(1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^n_{j-1/2}\right)(F^n_j - F^n_{j-1}) \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

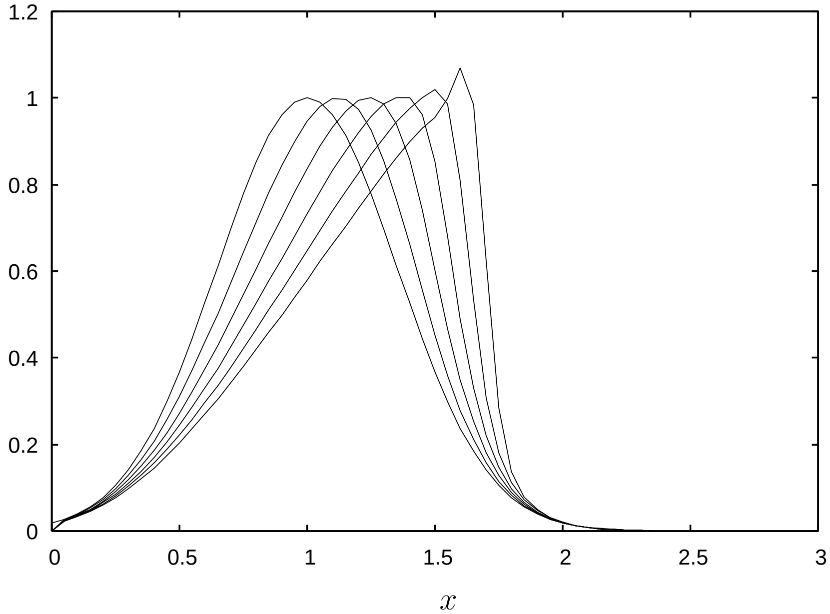
この scheme は $f = c\,u (c =$ 定数$)$ のとき，式 (3) において $a(u) = c$ となり

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}\,\rho\,(\rho - 1)\,u_{j+1}^n + (1 - \rho^2)\,u_j^n + \frac{1}{2}\,\rho\,(\rho + 1)\,u_{j-1}^n \tag{9}$$

となる。ここで $\rho = c\,\Delta t / \Delta x$ である。

問題 2 $f = c\,u\,(c$ は定数$)$ のとき (8) は (9) と同じであることを証明せよ。

問題 3 $f = \frac{1}{2}\,u^2$, $u(x, 0) = \exp(-4(x-1)^2)$ のとき方程式 (2) を Lax–Wendroff scheme (8) を用いて解け ($\Delta t = 1/64$, $\Delta x = 1/20$ の場合は下図のようになる)。



左から右へ $t = 0, \frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}.$

http://www.pna.eis.akita-pu.ac.jp/~ozawa/Lecture/Grad_Schl/HandOut08.pdf