その他の Scheme

移流方程式

$$u_t + c\,u_x = 0$$

を解くための解法を 2 つ紹介する。

1 Lax–Friedrichs Scheme

最初の Scheme は u_t の近似 $(u_j^{n+1} - u_j^n)/\Delta t$ において u_j^n の代わりに両隣の平均 $(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)/2$ を用い，u_x は中心差分で近似する方法である。すなわち

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right)}{\Delta t} + c\,\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\,\Delta x} = 0$$

である。これを書き直して

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{1}{2}\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) - \frac{\rho}{2}\left(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\,(1-\rho)\,u_{j+1}^n + \frac{1}{2}\,(1+\rho)\,u_{j-1}^n \end{aligned} \tag{1}$$

を得る。ここで $\rho = c\,\Delta t/\Delta x$ である。この解法は **Lax–Friedrichs Scheme** と呼ばれている。

2 Box Scheme

次に示すのは，u_t の近似を $x = j\,\Delta x$ と $x = (j+1)\,\Delta x$ で平均化し，u_x の近似を $t = n\,\Delta t$ と $t = (n+1)\,\Delta t$ で平均化したものである。すなわち

$$\frac{1}{2}\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t}\right) + \frac{c}{2}\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{\Delta x}\right) = 0$$

である。この式は次のように書き替えられる:

$$u_{j+1}^{n+1} = u_j^n + \frac{1-\rho}{1+\rho}\,(u_{j+1}^n - u_j^{n+1}) \tag{2}$$

この解法は **Box Scheme** と呼ばれている。この解法は右辺に u_j^{n+1} が入っているので，一見，陰解法に見えるが，初期条件 $u(x,0)$ の他に境界条件 $u(0,t)$ が与えられていれば陽解法として次の時間ステップ $t = (n+1)\,\Delta t$ での値が求まる。

次にこの解法の安定性解析を行うためいつもの様に $u_j^n = g\,\exp\left(\mathrm{i}\,j\,\xi\Delta x\right)$ と置く。そうすると $u_j^{n+1} = g\,u_j^n$，$u_{j\pm1}^n = u_j^n\,\exp\left(\pm\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)$ であるから

$$g = \frac{1 + \dfrac{1-\rho}{1+\rho}\,\exp\left(\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)}{\left(1 + \dfrac{1-\rho}{1+\rho}\,\exp\left(-\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)\right)\exp\left(\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)} \tag{3}$$

を得る。これより

$$
\begin{aligned}
|\,g\,| &= \frac{\left|1+\dfrac{1-\rho}{1+\rho}\exp\left(\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)\right|}{\left|1+\dfrac{1-\rho}{1+\rho}\exp\left(-\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)\right|\;|\exp\left(\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)|} \\
&= \frac{\left|1+\dfrac{1-\rho}{1+\rho}\exp\left(\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)\right|}{\left|1+\dfrac{1-\rho}{1+\rho}\exp\left(-\mathrm{i}\,\xi\,\Delta x\right)\right|} \\
&= 1
\end{aligned}
\tag{4}
$$

が直ちに得られる。すなわち Box Scheme は無条件に安定である。

数値例 次の方程式を 2 つの方法で解く。どちらの方法も $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.05$ とする。

$$
\begin{aligned}
&u_t + u_x = 0, \quad t > 0, \quad x \geq 0, \\
&u\,(0, t) = 0, \\
&u\,(x, 0) = \begin{cases} \sin \pi x & 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{else} \end{cases}
\end{aligned}
$$

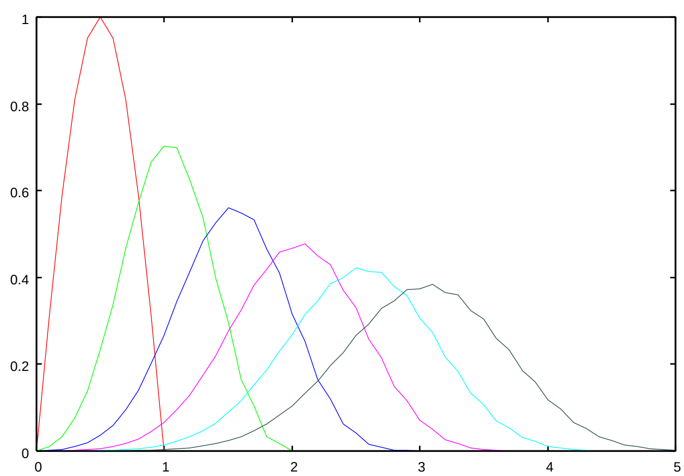

図 1. Lax–Friedrics scheme による数値解 (左から右へ $t = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$)

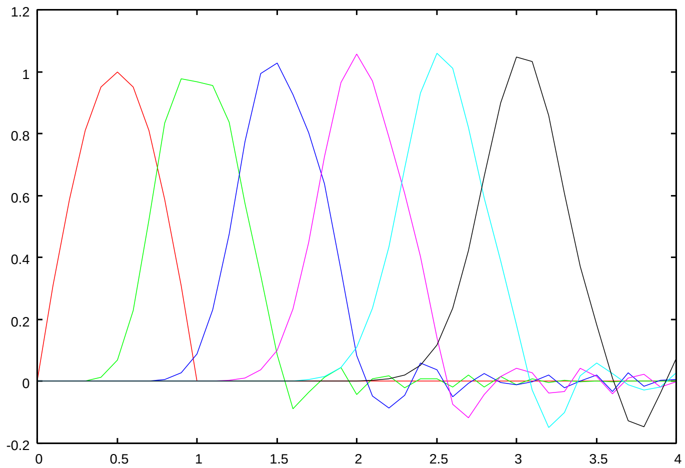

図 2. Box scheme による数値解 (左から右へ $t = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$)

問題 1 Lax–Friedrichs Scheme は $|\rho| \leq 1$ のとき安定になることを示せ。