Laplacian の高次差分近似

Poisson の方程式

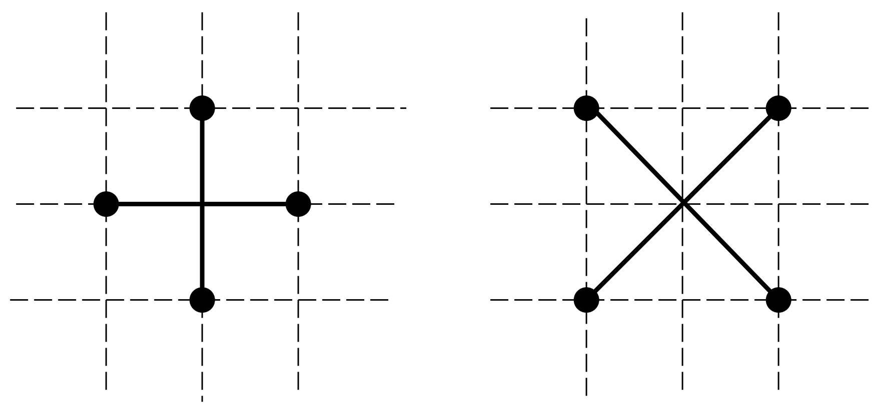
$$\Delta u = -f \tag{1}$$

を解くための高精度の差分公式を考える。ここで，

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

と表す。まず，$\Delta x = \Delta y = h$ とし，$u_{i,j}$ を $u(ih,\, jh)$ の近似とし，点 $(ih,\, jh)$ を中心とした以下のような和を考える。

$$\begin{aligned} S_+[u] &:= u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} \\ S_X[u] &:= u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j+1} \end{aligned} \tag{2}$$



$S_+[u]$ $\qquad$ $S_X[u]$

この 2 つの和は，Taylor 展開より

$$\begin{aligned} S_+[u] &= 4\,u_{i,j} + h^2\,(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{h^4}{12}\,(u_{xxxx} + u_{yyyy}) + \mathrm{O}(h^6) \\ S_X[u] &= 4\,u_{i,j} + 2\,h^2\,(u_{xx} + u_{yy}) + \frac{h^4}{6}\,(u_{xxxx} + 6\,u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \mathrm{O}(h^6) \end{aligned} \tag{3}$$

となる。ここで u_{xx}, u_{yy} などは点 $(ih,\, jh)$ におけるものである。次に，$T := 4\,S_+[u] + S_X[u] - 20\,u_{i,j}$ を計算すると

$$\begin{aligned} T &= 6\,h^2 \Delta u + \frac{h^4}{2}\,(u_{xxxx} + 2\,u_{xxyy} + u_{yyyy}) + \mathrm{O}(h^6) \\ &= 6\,h^2 \Delta u + \frac{h^4}{2}\,\Delta(\Delta u) + \mathrm{O}(h^6) \\ &= 6\,h^2 \Delta u - \frac{h^4}{2}\,\Delta f + \mathrm{O}(h^6) \end{aligned} \tag{4}$$

を得る。よって

$$\Delta u = \frac{T}{6\,h^2} + \frac{h^2}{12}\,\Delta f + \mathrm{O}(h^4) \tag{5}$$

を得る。ここで，上の式に

$$\Delta f = \frac{1}{h^2}\left(-4\,f_{i,j} + S_+[f]\right) + \mathrm{O}(h^2) \tag{6}$$

を代入すると

$$\Delta u = \frac{T}{6\,h^2} + \frac{-4\,f_{i,j} + S_+[f]}{12} + \mathrm{O}(h^4) \tag{7}$$

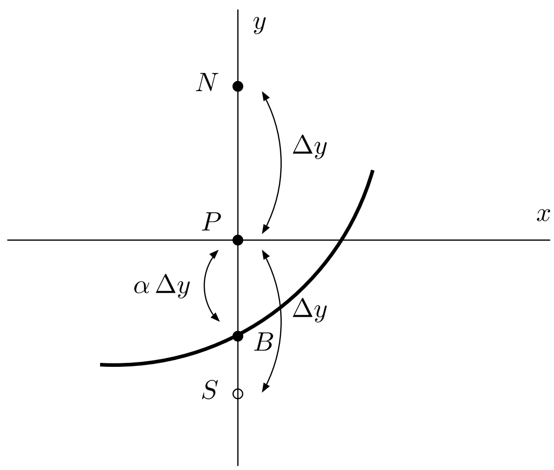
となり，Δu の 4 次精度の近似を得る。

参考文献

[1] 数値計算の基礎，藤野清次，サイエンス社，1998.

曲がった境界の扱い方

図のように並んだ 4 点 N, P, B, S があり，これらのうち，格子上の点 N, P と，(格子上にない) 境界上の B 点で関数 $u(y)$ の値が既知とする。このとき，これら不等間隔に並んだ点での関数値から P 点での 2 階偏導関数 $u_{yy}(y)$ を推定する問題を考える。



まず，値のわからない S 点での関数値を推定する。3 点 N, P, B での $u(y)$ の値をそれぞれ u_N, u_P, u_B とする。この 3 点でこれらの値を取る 2 次式を $f(y)$ で表すと，$f(y)$ は Lagrange の補間公式より

$$f(y) = \frac{(y-y_P)\,(y-y_B)}{(y_N-y_P)\,(y_N-y_B)}\,u_N + \frac{(y-y_N)\,(y-y_B)}{(y_P-y_N)\,(y_P-y_B)}\,u_P + \frac{(y-y_P)\,(y-y_N)}{(y_B-y_P)\,(y_B-y_N)}\,u_B \tag{8}$$

で与えられる。ここで

$$y_N = y_P + \Delta y, \quad y_S = y_P - \Delta y, \quad y_B = y_P - \alpha\,\Delta y$$

とおく。また直線上の任意の点 y を

$$y = y_P + t\,\Delta y$$

で表す。これらを式 (8) に代入すると

$$f(y) = \frac{t\,(t+\alpha)}{(1+\alpha)}\,u_N - \frac{(t-1)\,(t+\alpha)}{\alpha}\,u_P + \frac{t\,(t-1)}{\alpha\,(1+\alpha)}\,u_B \tag{9}$$

が得られる。$u_S = f(y_S)$ と近似すると

$$\begin{aligned} u_S &= -\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\,u_N + \frac{2\,(\alpha-1)}{\alpha}\,u_P + \frac{2}{\alpha\,(1+\alpha)}\,u_B \\ &= \frac{1}{\alpha\,(\alpha+1)}\left\{\alpha\,(1-\alpha)\,u_N + 2\,u_B + 2\,(\alpha^2-1)\,u_P\right\} \end{aligned} \tag{10}$$

が得られる。こうして求めた u_S と既知の u_P, u_N より P での 2 階偏導関数 $u_{yy}|_P$ を近似すると

$$\begin{aligned} u_{yy}|_P &\simeq \frac{1}{\Delta y^2}(u_N - 2\,u_P + u_S) \\ &= \frac{1}{\Delta y^2}\left\{2\,\alpha\,u_N - 2\,(1+\alpha)\,u_P + 2\,u_B\right\} \end{aligned} \tag{11}$$

となる。

偏導関数の極座標表示 (円領域での差分法)

Laplacian $\Delta\,u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ を極座標 (r, θ) で表現することを考える。
$x = r\,\cos\theta$, $y = r\,\sin\theta$ であるから,

$$r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{1}$$

となる。ここで，最初の式を x, y で偏微分すると

$$2\,r\,\frac{\partial r}{\partial x} = 2\,x, \qquad 2r\,\frac{\partial r}{\partial y} = 2\,y$$

となるので，これより

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \tag{2}$$

を得る。次に，式 (1) の二番目を x, y で偏微分すると

$$\sec^2\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}, \qquad \sec^2\,\theta\,\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{x}$$

となり,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{r} \tag{3}$$

を得る。

以上より，(r, θ) の関数 $f(r, \theta)$ の x, y による偏微分に関して以下の公式を得る：

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial\,f(r,\,\theta)}{\partial\,x} &= \frac{\partial\,f}{\partial\,r}\frac{\partial\,r}{\partial\,x} + \frac{\partial\,f}{\partial\,\theta}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,x} = \cos\theta\,\frac{\partial\,f}{\partial\,r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial\,f}{\partial\,\theta} \\ \frac{\partial\,f(r,\,\theta)}{\partial\,y} &= \frac{\partial\,f}{\partial\,r}\frac{\partial\,r}{\partial\,y} + \frac{\partial\,f}{\partial\,\theta}\frac{\partial\,\theta}{\partial\,y} = \sin\theta\,\frac{\partial\,f}{\partial\,r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial\,f}{\partial\,\theta} \end{aligned}}$$

ここで u を $(r,\,\theta)$ の関数と考え，この公式を利用すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

となる。また二階の偏微分に関しては，$\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ に上の公式を適用すれば

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
&= \cos\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \\
&= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial r} + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}
\end{aligned}
\tag{5}
$$

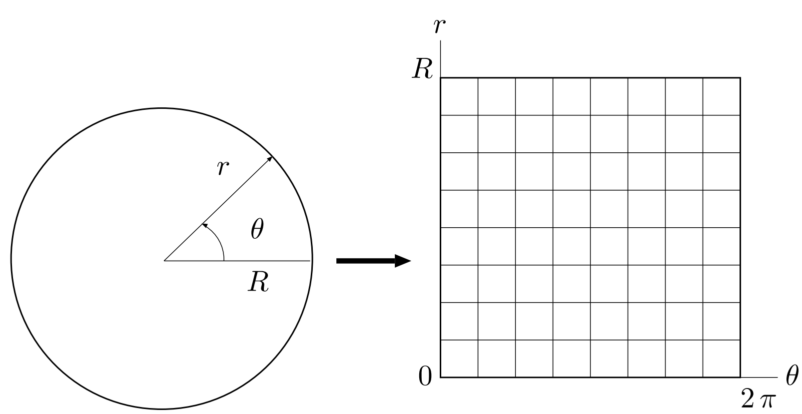
$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
&= \sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \\
&= \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\,\partial r} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\,\frac{\partial u}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

となる。

以上より次の公式を得る：

$$
\boxed{\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}}
$$

これらの公式を用いると，$(x,\,y)$ 平面上の円領域で定義された偏微分方程式が，$(r,\,\theta)$ 平面上の正方領域 $\{(r,\,\theta)\,|\,0 \le r \le R, 0 \le \theta \le 2\pi\}$ で定義された方程式になる。したがって，これまでに学んだ差分法がそのまま適用できる。



同様に x, y, z の三変数で定義された関数 $u(x,\,y,\,z)$ の Laplacian は，三次元極座標 $(r,\,\theta,\,\varphi)$ では次のようになる。ここでは結果だけを示しておく：

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

方程式 $\Delta u = 0$ の極座標表示での解き方

方程式

$$\begin{aligned} &\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \qquad 0 < r < 1, \quad 0 < \theta < 2\pi \\ &u(1,\theta) = \sin^2\theta \end{aligned} \tag{7}$$

の解法を考える。前と同様に $u(r,\theta)$ を r だけの関数 R と θ だけの関数 Θ の積で表す。すなわち $u(r,\theta) = R(r)\,\Theta(\theta)$ と置く。これを式 (7) 代入すると

$$R''(r)\,\Theta(\theta) + \frac{1}{r}\,R'(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}\,R(r)\,\Theta''(\theta) = 0 \tag{8}$$

となる。両辺に $r^2/(R\,\Theta)$ を掛けて

$$\frac{r^2\,R''}{R} + \frac{r\,R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \tag{9}$$

を得る。左辺は r だけの関数で右辺は θ だけの関数なのでこの値は定数となる。それを m^2 と置く。そうすると

$$\Theta'' = -m^2\,\Theta, \qquad r^2\,R'' + r\,R' = m^2\,R \tag{10}$$

という 2 つの方程式が得られる。

最初の方程式より

$$\Theta(\theta) = A\,\sin m\theta + B\,\cos m\theta \tag{11}$$

が得られ，二番目から

$$R(r) = C\,r^m + D\,r^{-m} \tag{12}$$

が得られる。ここで A, B, C, D は定数である。原点 $r = 0$ で特異にならないためには $D = 0$ である。したがって重ね合わせの原理より

$$u(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty}(A_m\,\sin\,m\theta + B_m\,\cos\,m\theta)\,r^m \tag{13}$$

となる一般解を得る。境界条件

$$u(1,\theta) = \sin^2\,\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\cos\,2\theta$$

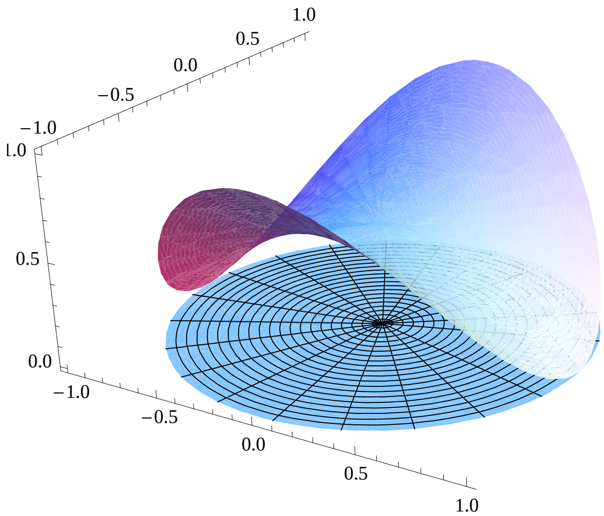
より

$$\begin{aligned} &A_m = 0, \quad m = 0, 1, \ldots, \\ &B_0 = \frac{1}{2},\ B_1 = 0,\ B_2 = -\frac{1}{2},\ B_3 = B_4 = \cdots = 0 \end{aligned}$$

となる。よって解は

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2}\cos\,2\theta \tag{14}$$

である。



解 (14) の形状

問題 1 式 (11) と (12) で与えられる解が方程式 (10) を満たしていることを示せ。

問題 2 方程式 (7) の境界条件が

$$u(1, \theta) = \sin^2 \theta + \frac{1}{4} \cos^2 \theta, \qquad 0 < \theta < 2\pi$$

与えられているとき解を求めよ。