

# 偏微分方程式の爆発時刻の推定法

廣田 千明\*, 小澤 一文\*

\* 秋田県立大学システム科学技術学部

## A Method of Estimating Blow-up Times of Partial Differential Equations

Chiaki HIROTA and Kazufumi OZAWA

Department of Electronics and Information Systems  
Faculty of Systems Science and Technology  
Akita Prefectural University

*Abstract.* A numerical method for estimating the blow-up time of the blow-up solution of partial differential equations (PDEs) is proposed. The main idea is to discretize the PDE in space, and to generate a convergent sequence to the blow-up time of the solution of the system of ordinary differential equations (ODEs) derived by the discretization. To generate the sequence efficiently, the system of ODEs, which necessarily has a singularity inherited from the PDE, is transformed into a tractable form by Moriguti's technique. In the transformed system, the time variable, which becomes one of the dependent variables, is shown to converge to the blow-up time when integrating the system over the semi-infinite interval  $[0, \infty)$ . Using this fact, a linearly convergent sequence to the blow-up time is generated, and accelerated by the Aitken  $\Delta^2$  method. The present method is applicable to the wide range of PDEs, only if the blow-up time of the ODE system is guaranteed to converge to that of the PDE. Numerical experiments on the two PDEs, the semi-linear reaction-diffusion equation and the heat equation with a nonlinear boundary condition, show the validity of the method.

## 1 はじめに

偏微分方程式では反応項や境界条件の非線形性によって、しばしば解  $u$  のノルムが有限時刻  $t = T < \infty$  で発散することがある。これは解の爆発現象として知られており化学の燃焼理論に現れる [6, 22]。このようなとき解  $u$  は爆発解,  $T$  は爆発時刻と呼ばれるている。爆発解の研究では、解が爆発するための条件, 爆発集合, 爆発レート, 爆発時刻の下限などが研究対象とされているが、爆発時刻を解析的に求めることは困難であると思われる。またそのための数値的手法も提案されていない。本研究では爆発解を持つ放物型偏微分方程式のうち主に半線形反応拡散方程式と非線形境界条件を持つ熱方程式を対象とし、爆発時刻および爆発レートを数値的に効率よく推定する方法を提案する。

## 2 爆発解を持つ偏微分方程式

爆発解を持つ偏微分方程式の初期値・境界値問題として、有名な2つの問題を考える。

## 2.1 半線形反応拡散方程式

問題 2.1 最初の問題は次の初期値・境界値問題である：

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u + f(u), & (x, t) \in \Omega \times [0, T), \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, t \in [0, T), \\ u(x, 0) &= u^0(x), & x \in \Omega. \end{aligned}$$

ここで  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^d$  の閉領域とし、 $u^0$  は  $u^0(x) = 0$  ( $x \in \partial\Omega$ ) を満たす自明でない滑らかな非負関数とする。

この問題では反応項  $f$  が  $f(u) = u^r$  ( $r > 1$ ) あるいは  $f(u) = e^u$  のとき、初期条件  $u^0$  によっては有限時刻  $t = T < \infty$  で解のノルムが発散することが知られている [13]。すなわち

$$\lim_{t \uparrow T} \|u(\cdot, t)\| = \infty$$

となる  $T$  が存在する。ここでノルムは適当なノルムとする。実際、領域を  $\Omega = [0, 1]$ 、反応項を  $f(u) = u^2$  とし、初期条件を  $u^0(x) = 100 \sin(\pi x)$  および  $u^0(x) = 100(1 - \cos(4\pi x))$  とした場合について数値解を求めると、それぞれ Fig. 1, 2 のようになり解が急速に増大していることがわかる。

領域が  $\Omega = [0, 1]$  で反応項が  $f(u) = u^2$  のとき、偏微分方程式 (2.1) の爆発解を数値的に求める方法として Nakagawa [19] は次のような差分スキームを提案している：

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \frac{\tilde{U}_i^{m+1} - \tilde{U}_i^m}{\Delta t_m} &= \frac{\tilde{U}_{i+1}^m - 2\tilde{U}_i^m + \tilde{U}_{i-1}^m}{(\Delta x)^2} + (\tilde{U}_i^m)^2, & i = 1, \dots, n-1, \\ \tilde{U}_0^m = \tilde{U}_n^m &= 0, & m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

ここで  $\tilde{U}_i^m$  は  $t_m = t_{m-1} + \Delta t_{m-1}$ 、 $x_i = i\Delta x$  における解  $u(x_i, t_m)$  の近似である。このスキームでは、時間方向のステップ・サイズ  $\Delta t_m$  は

$$\Delta t_m = \tilde{\tau} \times \min \left\{ 1, \frac{1}{\|\tilde{U}^m\|} \right\}$$

のように適応的に変更していく。ここで、 $\tilde{\tau} = \tilde{\lambda}(\Delta x)^2$  であり、 $\tilde{\lambda}$  は  $0 < \tilde{\lambda} \leq 1/2$  を満たす予め与えられた定数である。また、

$$\|\tilde{U}^m\| = \left( \sum_{i=0}^n \Delta x \cdot (\tilde{U}_i^m)^2 \right)^{1/2}$$

である。このスキームをここでは **Nakagawa のスキーム** と呼ぶことにする。Nakagawa のスキームでは  $t_m \rightarrow T$  ( $m \rightarrow \infty$ ) が保証されているので、 $t_m$  の値を追跡することによって爆発時刻  $T$  を推定することができる。また、Chen [7] はこの手法を拡張し  $f(u) = u^r$  ( $r > 1$ ) に対して有効な適応的な差分スキームを提案している。これは  $\Omega$  が  $\mathbb{R}^d$  の球の場合に拡張されている [8]。

これらのスキームは  $L^q$  ノルム ( $q = 1$  または  $2$ ) に関して解が爆発することを仮定して導出されているが、Friedman and McLeod [12] はこの仮定を満たさない反応項があることを示している。したがって、Nakagawa [19] や Chen [7, 8] の方法が適用できない問題があることになる。そこで、

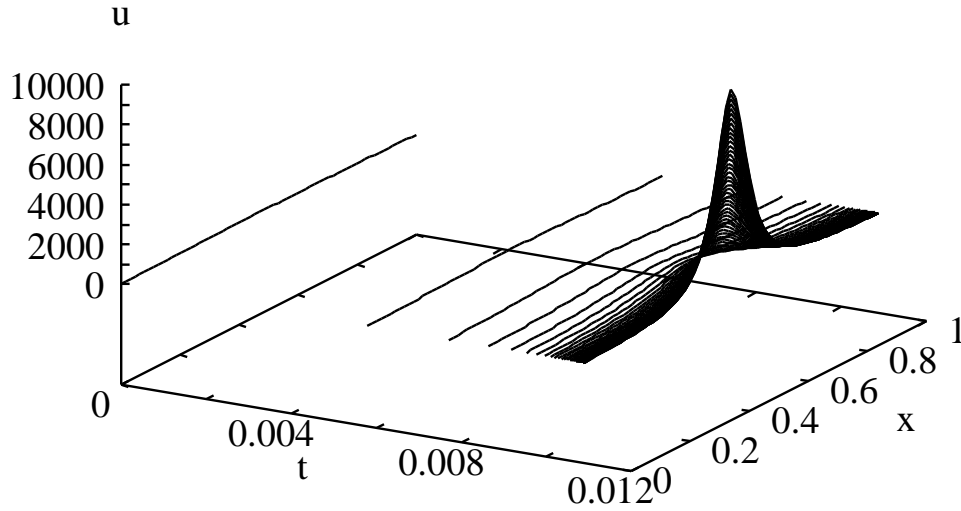


Fig. 1. Solution profile of (2.1) when  $\Omega = [0, 1]$ ,  $f(u) = u^2$  and  $u^0(x) = 100 \sin(\pi x)$ .

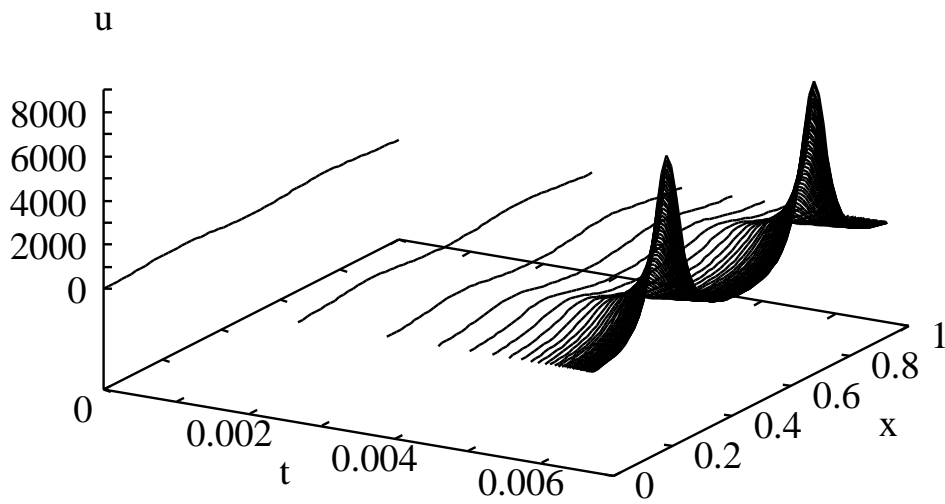


Fig. 2. Solution profile of (2.1) when  $\Omega = [0, 1]$ ,  $f(u) = u^2$  and  $u^0(x) = 100(1 - \cos(4\pi x))$ .

より一般の反応項  $f$  を持った偏微分方程式を解析するために偏微分方程式 (2.1) を空間に関して離散化した半離散化方程式

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{dU_i}{dt} &= \delta^2 U_i + f(U_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad t > 0, \\ U_0(t) &= U_n(t) = 0, \quad t > 0, \\ U_i(0) &= u^0(x_i), \quad i = 0, \dots, n, \end{aligned}$$

を解析するという手法が考えられている [1, 2, 3, 14, 24]. ここで  $\delta^2$  はラプラシアン  $\Delta$  の差分近似を表す. 我々も半離散化方程式 (2.3) の爆発時刻から偏微分方程式 (2.1) の爆発時刻を推定するという立場をとる.

ここで問題となるのは (2.1) の爆発時刻と (2.3) のそれとの関係である. このことに関して, 空間が 1 次元の場合,  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限で半離散化方程式 (2.3) の爆発時刻が偏微分方程式 (2.1) のそれに収束することが示されている [1, 2]. Ushijima [24] はこの結果を多次元に拡張している. したがって, 偏微分方程式 (2.1) の爆発時刻を推定するために常微分方程式系 (2.3) の爆発時刻を求めることは有効な手法である.

## 2.2 非線形境界条件を持つ熱方程式

**問題 2.2** 第 2 の問題は次の初期値・境界値問題である:

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \Delta u, \quad (x, t) \in [0, 1] \times [0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1} &= f(u(1, t)), \quad t \in [0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} &= 0, \quad t \in [0, T), \\ u(x, 0) &= u^0(x) \geq 0, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

ここで  $f > 0$  は滑らかな増加関数とし  $u^0$  は境界条件を満たす自明でない滑らかな非負関数とする.

偏微分方程式 (2.4) もある条件の下に爆発解を持つことが知られている [25]. そのような例として,  $f(u) = u^2$  で, 初期条件が  $u^0(x) = 1, x$  の場合などが挙げられる. これらの場合について数値解を求めると Fig. 3, 4 のようになる. 問題 2.1 と同様に, この問題に対しても半離散化方程式を解析することでもとの偏微分方程式を解析しようとする試みがなされている [4, 5, 11, 20]. 本論文でもそのような立場を取る.

刻み幅を  $\Delta x = 1/n$  とし  $U_i(t) \simeq u(i\Delta x, t)$  ( $i = 0, \dots, n$ ) とすると, 偏微分方程式 (2.4) を半離散化した方程式は

$$(2.5) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & & & \mathbf{0} \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{n-1} \\ U_n \end{pmatrix} + \frac{2}{\Delta x} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(U_n) \end{pmatrix},$$

$$U_i(0) = u^0(i\Delta x), \quad i = 0, \dots, n,$$

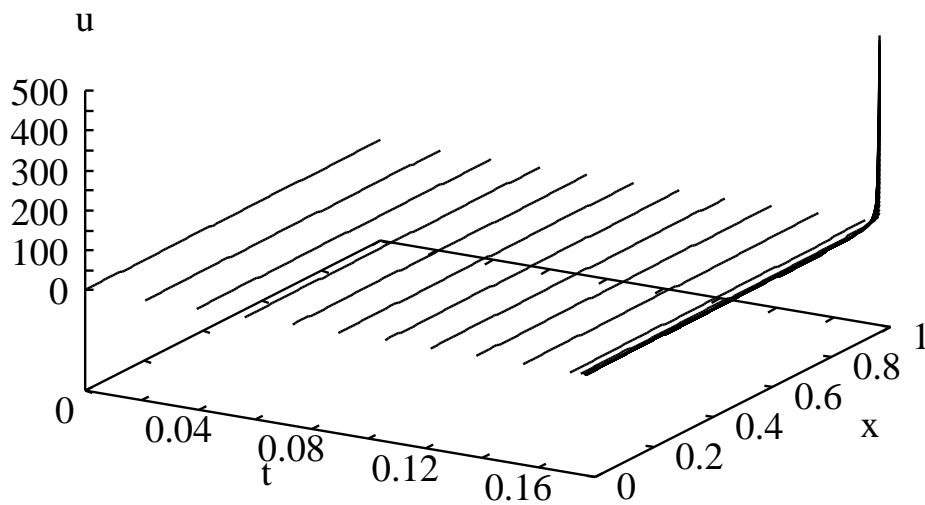


Fig. 3. Solution profile of (2.4) when  $\Omega = [0, 1]$ ,  $f(u) = u^2$  and  $u^0(x) = 1$ .

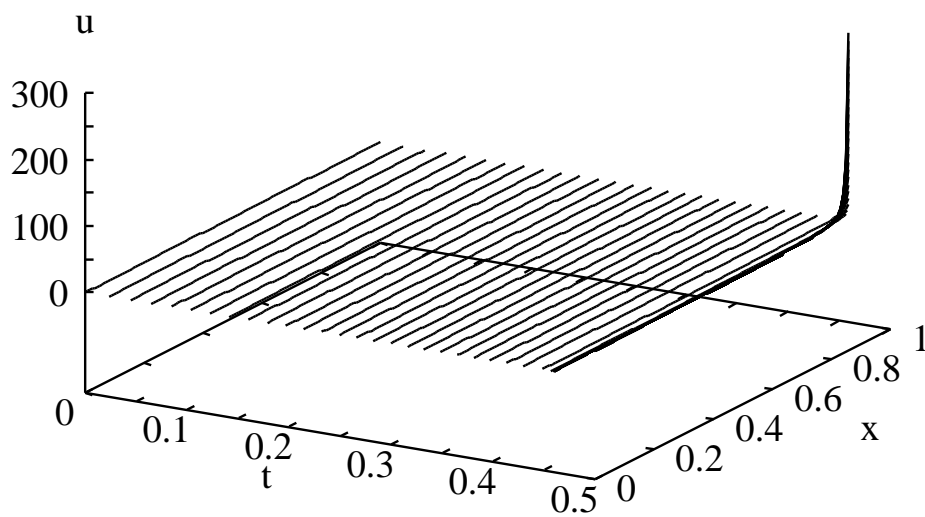


Fig. 4. Solution profile of (2.4) when  $\Omega = [0, 1]$ ,  $f(u) = u^2$  and  $u^0(x) = x$ .

となる．この問題に対しても  $\Delta x \rightarrow 0$  の極限で半離散化方程式 (2.5) の爆発時刻が偏微分方程式 (2.4) のそれに収束することが示されている [9]．したがって，常微分方程式系 (2.5) の爆発時刻を求めることは偏微分方程式 (2.4) の爆発時刻を推定するための有効な手法である．

以下では常微分方程式系の爆発時刻を推定する方法を考察する．

### 3 常微分方程式系の爆発時刻の推定法

#### 3.1 ステップ・サイズを一定とする数値解法による解析

まず，次のスカラ方程式の初期値問題を考える：

##### 問題 3.1 初期値問題

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= y^\alpha, \quad \alpha > 1, \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

の解は

$$(3.2) \quad y(t) = \frac{1}{(1 - (\alpha - 1)t)^{1/(\alpha-1)}}$$

で与えられ， $t = 1/(\alpha - 1)$  に  $1/(\alpha - 1)$  位の極が存在する．

常微分方程式 (系) の場合も，このように有限時刻  $t$  で解のノルム  $\|y(t)\|$  が発散する解を爆発解，解が発散する時刻  $T$  を爆発時刻と呼んでいる．本節では，爆発解を持つ常微分方程式 (系) の爆発時刻を推定する手法を提案する．

まず考えられるのは，十分大きな定数  $M > 0$  を与え，時間に関するステップ・サイズ  $\Delta t$  を一定とし，通常の数値解法で解を求めていき，最初に  $\|y_m\| > M$  となる  $t_m = m\Delta t$  を爆発時刻の推定値とする方法である．以下この方法について考察する．

微分方程式 (3.1) で  $\alpha = 2$  の場合を考える．このとき解は  $y(t) = 1/(1 - t)$  となり， $t = 1$  に 1 位の極が存在する．この方程式を前進 Euler 法によって解いた結果を Fig. 5 に示す．この図からわかるように，解の存在しない  $t \geq 1$  においても数値計算が行われてしまい，爆発時刻を推定する目的にはこの方法はほとんど役に立たないと思われる．実際， $M = 10^5$  とした用いた場合， $\Delta t = 0.1, 0.05, 0.02$  に対して得られた推定値はそれぞれ 1.6, 1.3, 1.14 ている．微分方程式 (3.1) に前進 Euler 法を適用したときの詳細な誤差解析は Sanz-Serna and Verwer [21] によって与えられている．以下でこの解析について簡単に述べる．

厳密解  $y$  に対し  $y(t) = M$  を満たす  $t$  を  $t^*$  とすると，式 (3.2) から

$$(3.3) \quad t^* = \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{(\alpha - 1)M^{\alpha-1}}$$

となる．ここで，前進 Euler 法によって得られた数値解をステップ間で線形補間することによって，ちょうど  $y_m = M$  となる  $m$  (必ずしも整数でない) を求め， $t^{**} = m\Delta t$  とする．このとき，Sanz-Serna and Verwer [21] は

$$(3.4) \quad t^{**} - t^* = \frac{\alpha\Delta t}{2} \ln M + O((\Delta t)^2)$$

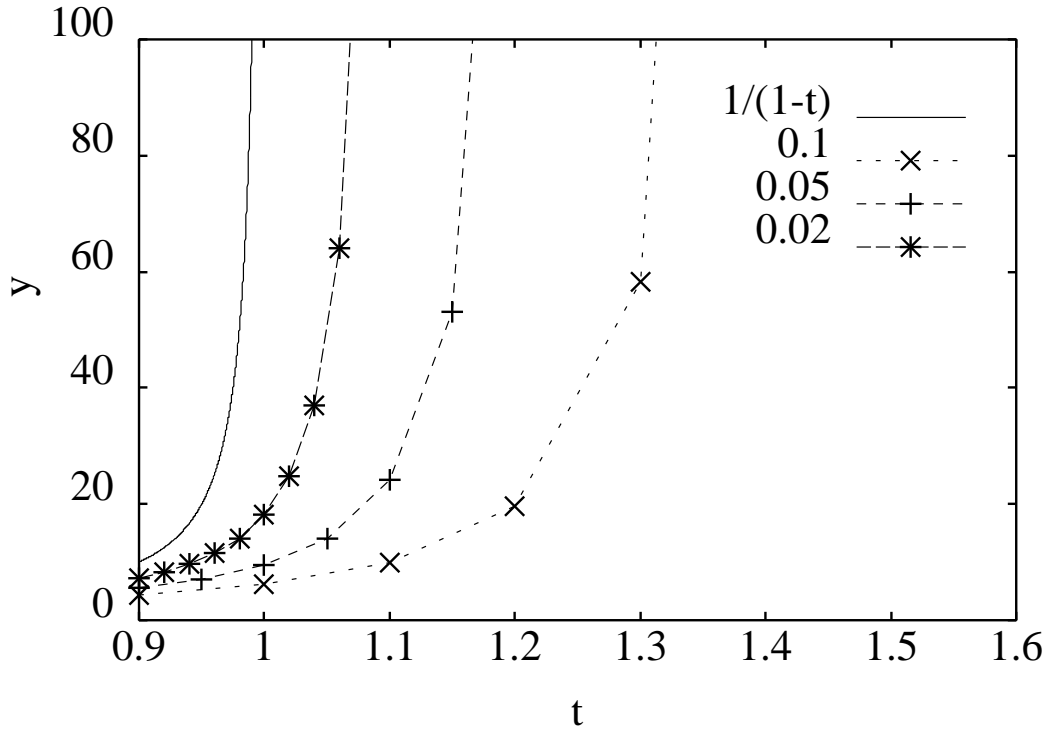


Fig. 5. Numerical solutions of (3.1) with  $\alpha = 2$  by the explicit Euler method, where the step-sizes are 0.1, 0.05, and 0.02.

となることを示している。以上の2式より、爆発時刻  $T$  と数値的に求められた爆発時刻  $t^{**}$  との差は

$$(3.5) \quad t^{**} - T = -\frac{1}{(\alpha - 1)M^{\alpha-1}} + \frac{\alpha \Delta t}{2} \ln M + O((\Delta t)^2)$$

となることがわかる。ここで、 $\Delta t$  を

$$(3.6) \quad \Delta t = \frac{2}{\alpha(\alpha - 1)M^{\alpha-1} \ln M}$$

とすると、式(3.5)で  $O(\Delta t)$  の項が消去され

$$t^{**} - T = O((\Delta t)^2)$$

となる。式(3.6)は、精度を上げるために  $M$  を大きくすると  $\Delta t$  を小さくせざるを得なくなることを示している。また、 $\alpha$  が大きいときほどその傾向が顕著になっていることも示している。したがって、ステップ・サイズを一定とする解法では、爆発時刻のだいぶ手前の解がまだ平坦な場所でも非常に小さいステップ・サイズを使うことになり、計算のコストが大きくなることがわかる。以上の議論は、古典的 Runge-Kutta 法のようなより精度の高い解法を用いたとしても同様であろう。

一方、解が特異性を持つような常微分方程式を解くために開発された数値解法がいくつか提案されている（詳しくは、Fatunla [10, pp. 125–139], Lambert [17, pp. 209–216] などを見よ）。このような解法を用いて爆発時刻を推定することも考えられるが、これらの解法はスカラ方程式にしか

適用できないものであるため、偏微分方程式を半離散化して得られた方程式系には適用できない。またこれらの解法はステップ・サイズを一定とする解法でもある。

次節では解の特異性を除去する変数変換を考察する。

### 3.2 特異性を除去する変数変換

解が爆発するという特異性を除去する変数変換として現在のところ 2 つの方法が知られている。最初は Acosta *et al.* [5] によって提案されている変換法で、常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad y(0) = y^0$$

の代わりに解  $y$  を独立変数とする方程式

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{f(y)}, \quad y \in [y^0, \infty)$$

を解くものである。常微分方程式系の場合には、 $y$  のいくつかある成分のうち発散するものを選びそれを独立変数とすればよい。しかし事前にそのような成分がわかることは稀であるから、この方法の適用範囲はかなり制限されることになる。

二番目は森口によって提案された方法である [18]。これは常微分方程式系にも適用可能であり、事前に発散する成分がわかっている必要はない。以下この方法を説明する。

常微分方程式の初期値問題

$$(3.7) \quad \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad y(0) = y^0$$

を考える。ここで、 $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ ,  $f(t, y) = (f_1(t, y), f_2(t, y), \dots, f_n(t, y))^T$ ,  $y^0 = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)^T$  とし、解  $y$  のある成分が  $t = T (> 0)$  で発散すると仮定する。このような問題に対して、森口は解曲線の長さ  $s$  を独立変数とする変数変換を提案している [18]。解曲線の線素  $ds$  は  $(ds)^2 = (dt)^2 + (dy_1)^2 + \dots + (dy_n)^2$  を満たすので、 $t$  と  $y_i (i = 1, \dots, n)$  を  $s$  の関数とみたとき、これらの満たす微分方程式は

$$(3.8) \quad \frac{d}{ds} \begin{pmatrix} t \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix},$$

$$t(0) = 0, \quad y(0) = y^0$$

と表される。この変数変換を**森口の変換**と呼ぶことにする。ここで、変換後の方程式では  $t$  が独立変数から従属変数になっていることに注意する。

この方程式では有限の  $s$  に対して解は有限であるので、 $s$  の刻み幅を一定として数値解を求めたとしても、3.1 節で指摘したような解の存在しないところでも数値計算が行われるという問題は起こり得ないことになる。また、 $t$  が  $T$  に近づくにしながら、式 (3.8) 右辺のもっとも発散の速い成分はある定数に近づいていき、他の成分は 0 に近づいていくという好ましい性質も備えている。実際、微分方程式 (3.1) で  $\alpha = 2$  とした場合、変換後の方程式は

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^4}} \begin{pmatrix} 1 \\ y^2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix}$$



Table 1. Examples of Problem 3.1.

$\alpha$	equation	initial condition	solution	blow-up time $T$
2	$y' = y^2$	$y^0 = 1$	$y(t) = 1/(1-t)$	1
3/2	$y' = y^{3/2}$	$y^0 = 1$	$y(t) = 1/(1-t/2)^2$	2

となり，方程式の右辺  $g_0, g_1$  を図示すると Fig. 6, 7 のようになっている．森口の変換を行った後の方程式は，このように爆発時刻に近づけば近づくほど解の勾配が一定の値に近づいくので，計算コストの少ない陽的解法によって容易に解くことができる．

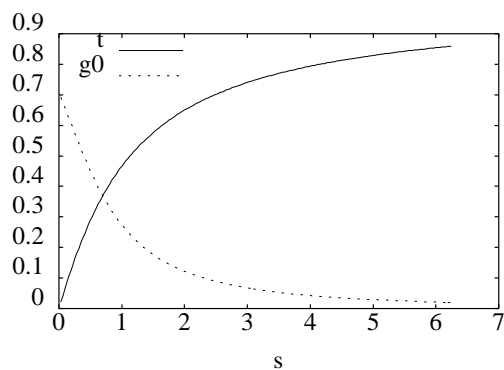


Fig. 6.  $t(s)$  and  $g_0(s)$  versus  $s$  for (3.1) with  $\alpha = 2$ .

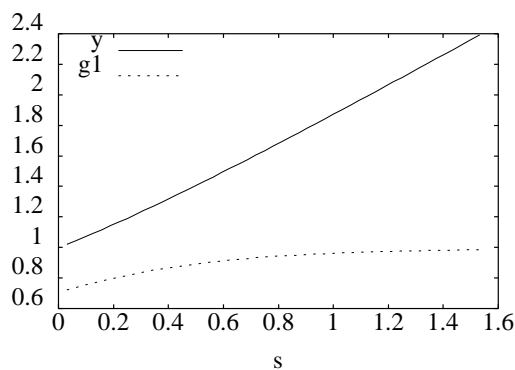


Fig. 7.  $y(s)$  and  $g_1(s)$  versus  $s$  for (3.1) with  $\alpha = 2$ .

次に森口の変換を用いて爆発時刻を推定することを考える．再び問題 3.1 を考えよう．ここでは Table 1 に挙げた 2 つの場合を対象とする．十分大きなパラメタ  $M > 0$  を与え，数値解  $y_m$  が  $|y_m| > M$  となるまで積分し，そのときの  $t$  の値  $t_m$  と爆発時刻  $T$  との差を調べてみる．すべての数値計算は IEEE754 規格の倍精度を用いて行う．数値解法はステップ・サイズの適応的な変更が可能な埋め込み型 Runge-Kutta 公式の 1 つである Dormand-Prince 5(4) 公式 [15, pp. 178-179] を用いる．実際のコードは <http://www.unige.ch/math/folks/haier/software.html> からダウンロードした DOPRI5 を用いる．このコードのパラメタを ITOL=0, RTOL=ATOL=1.d-15 に設定する．実験結果を Table 2, 3 に示す．

これらの結果から，十分な精度で爆発時刻を推定するには森口の変換を用いたとしても多くの計算ステップを必要とすることがわかる．そこで，我々はより高速な方法を提案する．

### 3.3 爆発時刻へ収束する数列と Aitken $\Delta^2$ 法による加速

本節では爆発時刻に収束する 1 次収束列を生成し，それに Aitken  $\Delta^2$  法（詳しくは，Henrici [16, pp. 70-75], Traub [23, pp. 265-268] などを見よ）を適用し加速することを考える．まず，初期値問題 (3.7) の解  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$  について以下のことを仮定する：

Table 2. Eq. (3.1) with  $\alpha = 2$ .

$\log_{10} M$	$t_m - T$	steps
4	-9.994d-05	4178
5	-9.995d-06	5240
6	-9.997d-07	6302
7	-9.999d-08	7364
8	-9.979d-09	8427
9	-9.980d-10	9489
10	-9.982d-11	10551
11	-9.980d-12	11613

$t_m$ : the first  $t$ -value at which  $|y_m| > M$ .

Table 3. Eq. (3.1) with  $\alpha = 3/2$ .

$\log_{10} M$	$t_m - T$	steps
4	-1.999d-02	3398
5	-6.317d-03	4262
6	-1.999d-03	5125
7	-6.319d-04	5989
8	-2.000d-04	6852
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
22	-2.000d-11	18942
23	-6.326d-12	19806

$t_m$ : the first  $t$ -value at which  $|y_m| > M$ .

### 仮定 3.2

- $y$  の少なくとも 1 つの成分が  $t = T < \infty$  に  $p (> 0)$  位の極を持つ. そのうちの 1 つの成分を  $y_\nu$  とする. さらに  $y_\nu$  は  $t = T$  の左近傍で Laurent 展開可能で

$$(3.9) \quad y_\nu(t) = \frac{c_p}{(T-t)^p} + o\left(\frac{1}{(T-t)^p}\right), \quad t \uparrow T$$

とする. ここで  $c_p$  は  $t$  に依らない定数であり, 一般性を失うことなく  $c_p > 0$  とする. さらに項別微分可能であるとすると,  $f_\nu$  は

$$(3.10) \quad f_\nu(t, y(t)) = y'_\nu(t) = \frac{p c_p}{(T-t)^{p+1}} + o\left(\frac{1}{(T-t)^{p+1}}\right), \quad t \uparrow T$$

となる.

- すべての  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) は,  $t < T$  で極を持たない.
- $y_i$  ( $i \neq \nu, i = 1, \dots, n$ ) は,  $t = T$  で極を持っても  $p$  位以下である.

この仮定の下に, 爆発時刻への収束性を示す次の定理を証明する.

**定理 3.3** 微分方程式 (3.7) の爆発時刻  $T$  は

$$(3.11) \quad T = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}}$$

となる.

(証明) 解曲線の長さ  $s$  は

$$(3.12) \quad s = h(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^t \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2} dt$$

で与えられる。これは、式 (3.10) より

$$(3.13) \quad \lim_{t \uparrow T} h(t) = +\infty$$

を満たす。また、 $h(t)$  は

$$\frac{dh}{dt} = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2} > 0$$

を満たすので、狭義単調増加関数になり逆関数  $h^{-1}$  が存在する。このとき

$$\frac{dh^{-1}}{ds} = \frac{1}{\frac{dh}{dt}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}}$$

から、

$$t = h^{-1}(s) = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}}$$

を得る。したがって、式 (3.13) および逆関数  $h^{-1}(s)$  の一価性より

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} h^{-1}(s) = T$$

となり、式 (3.11) が証明された。 ■

**定理 3.4** 微分方程式系 (3.7) の解  $y$  は仮定 3.2 を満たすものとする。このとき、

$$S_l = S_0 \cdot \gamma^l, \quad S_0 > 0, \quad \gamma > 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

によって数列  $\{S_l\}$  を定義し、 $s = 0$  から  $S_l$  まで微分方程式系 (3.8) を積分することによって得られた  $t$  の値を  $t_l = t(S_l)$  とする。このとき、 $\{t_l\}$  は爆発時刻  $T$  に 1 次収束する。

(証明) 式 (3.8) の第 1 成分と式 (3.11) から

$$T - t = \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} - \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} = \int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}}$$

を得る。一方、式 (3.8) の第  $(\nu + 1)$  成分と式 (3.9), (3.10) から

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty \frac{ds}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} &= \int_s^\infty \frac{dy_\nu(s)}{f_\nu} \\
&= \int_s^\infty \left( \frac{(T-t)^{p+1}}{p c_p} + o((T-t)^{p+1}) \right) dy_\nu(s) \\
&= \int_s^\infty \left( \frac{c_p^{1/p} y_\nu^{-\frac{p+1}{p}}}{p} + o(y_\nu^{-\frac{p+1}{p}}) \right) dy_\nu(s) \\
&= c_p^{1/p} y_\nu^{-1/p}(s) + o(y_\nu^{-1/p}(s)), \quad s \rightarrow +\infty
\end{aligned}$$

を得る. ここで  $t = T$  で  $p$  位の極を持つ成分が複数個あるとして,  $f$  の  $1/(t-T)^{p+1}$  の係数の 2 乗和を  $\mu$  とすると, 式 (3.8) の第  $(\nu+1)$  成分に関して

$$\frac{dy_\nu}{ds} = \frac{f_\nu}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^n f_i^2}} \rightarrow \frac{p c_p}{\sqrt{\mu}}, \quad s \rightarrow +\infty$$

という結果を得る. したがって

$$y_\nu(s) \rightarrow \frac{p c_p}{\sqrt{\mu}} s + (\text{定数}), \quad s \rightarrow +\infty$$

を得る. これより,

$$(3.14) \quad T - t = p^{-1/p} \mu^{\frac{1}{2p}} s^{-1/p} + o(s^{-1/p}), \quad s \rightarrow +\infty$$

となる.  $s = S_l$  のときの  $t$  を  $t_l$ , その誤差を  $e_l$  とすれば, 式 (3.14) より

$$e_l \stackrel{\text{def}}{=} t_l - T = -\frac{\mu^{\frac{1}{2p}}}{p^{1/p} \cdot S_0^{1/p}} \gamma^{-l/p} + o(\gamma^{-l/p}), \quad l \rightarrow \infty$$

となる. これより  $e_l \rightarrow 0 (l \rightarrow \infty)$  となり,

$$(3.15) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{l+1}}{e_l} \right| = \gamma^{-1/p}$$

を満たす. すなわち, 数列  $\{t_l\}$  は爆発時刻  $T$  に 1 次収束する. ■

数列  $\{S_l\}$  の選び方を変えればより速い収束列を生成することができることを以下の系は示している:

**系 3.5 条件**

$$\xi_l \rightarrow +\infty, \quad \frac{\xi_l}{\xi_{l+1}} \rightarrow 0, \quad l \rightarrow \infty$$

を満たす数列  $\{\xi_l\}$  を選び, それを用いて

$$S_l = \xi_l \cdot \gamma^l, \quad \gamma > 1$$

とすれば  $e_l \rightarrow 0 (l \rightarrow \infty)$  となり,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{l+1}}{e_l} \right| = 0$$

を満たす. すなわち, 数列  $\{t_l\}$  は  $T$  への超 1 次収束列になる.

**系 3.6** 数列  $\{S_l\}$  を

$$S_l = K\gamma^{ql}, \quad K > 0, \quad \gamma > 1, \quad q > 1$$

のように選べば  $e_l \rightarrow 0 (l \rightarrow \infty)$  となり

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left| \frac{e_{l+1}}{e_l^q} \right| < \infty$$

を満たす. すなわち, 数列  $\{t_l\}$  は  $T$  への  $q$  次収束列になる.

上に示した系より,  $\{S_l\}$  の増大速度を大きくとれば任意に収束速度を速くできることがわかった. しかし,  $t_l$  は常微分方程式系 (3.8) を  $s = 0$  から  $S_l$  まで積分することによって得られるものであるから,  $\{S_l\}$  の増大速度を大きくするとそれに伴って積分のためのコストも増大することになる. また, 超 1 次収束列や 2 次収束列などの高次収束列を効率的に加速する方法は今のところ知られていない. そのためここでは 1 次収束列を生成しそれを加速する方法を用いることにする. 1 次収束列を生成した場合, その収束率は式 (3.15) に示されているように極の位数  $p$  に依存するので,  $p$  が未知のときは収束率も未知になる. そこで, 収束率が未知な場合にも適用できる Aitken  $\Delta^2$  法を用いて数列  $\{t_l\}$  を加速することにする.

我々は以下のアルゴリズムを提案する:

### アルゴリズム 3.7

1. 適当な  $S_0 > 0, \gamma > 1$  に対して, 数列  $\{S_l\}$  を

$$S_l = S_0 \cdot \gamma^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

で定義する.

2.  $s = S_l$  まで常微分方程式系 (3.8) を積分し, そのときの  $t$  の値を  $t_l$  とする.
3.  $t_l^{(0)} = t_l (l = 0, 1, 2, \dots)$  として, この数列に Aitken  $\Delta^2$  法

$$t_{l+2}^{(k+1)} = t_{l+2}^{(k)} - \frac{(t_{l+2}^{(k)} - t_{l+1}^{(k)})^2}{t_{l+2}^{(k)} - 2t_{l+1}^{(k)} + t_l^{(k)}}, \quad l \geq 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

を適用し加速する.

### 3.4 爆発レートの推定

我々がいま提案したアルゴリズムを用いると発散速度，すなわち極の位数も容易に推定することができる．以下その方法を簡単に説明する．

いま  $K$  回加速を行って  $L > 2K$  段まで加速列を求めたとき，最後の値  $t_L^{(K)}$  が  $T$  の十分満足できる近似であったとする．このとき

$$\lambda_l \stackrel{\text{def}}{=} \left| \frac{t_l^{(0)} - t_L^{(K)}}{t_{l-1}^{(0)} - t_L^{(K)}} \right|$$

なる量は，十分大きな  $l \leq L$  に対して収束率  $\lambda$  の良い近似であることが期待される．一方，式 (3.15) より  $\lambda = \gamma^{-1/p}$  であるから，極の位数  $p$  は  $p = -1/\log_\gamma \lambda$  となる．したがって， $p_l$  を

$$(3.16) \quad p_l \stackrel{\text{def}}{=} -1/\log_\gamma \lambda_l = -1/\log_\gamma \left| \frac{t_l^{(0)} - t_L^{(K)}}{t_{l-1}^{(0)} - t_L^{(K)}} \right|$$

で定義すれば，この値は十分大きな  $l \leq L$  に対して  $p_l \simeq p$  となっていることが期待される．この  $p_l$  を発散速度（極の位数） $p$  の推定値とする．

### 3.5 数値実験

我々が提案した方法の効果を見るため再び問題 3.1 を考えよう．ここで積分の端点  $S_l$  を  $S_l = 16 \cdot 2^l$  ( $l = 0, \dots, 10$ ) とし，加速回数は 3 回とする．数値解法は前と同様 DOPRI5 を用い，入力パラメタは ITOL=0, RTOL=ATOL=1.d-15 とする．実験結果を Table 4, 5 に与える．表中， $e_l^{(k)}$  は

$$e_l^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} t_l^{(k)} - T$$

を表している．この結果を前の結果 (Table 2, 3) と比較すればわかるように，加速の効果が著しく現われ，かなり少ないステップで爆発時刻が高精度で推定されている．また，爆発レートも十分な精度で推定されている．

## 4 偏微分方程式への応用

次に我々が提案した方法を用いて 2 つの問題 2.1, 2.2 の爆発時刻を数値的に計算する．どちらの問題も解が爆発することがわかっている反応項  $f$  と初期条件  $u^0$  を用いる．

### 4.1 半線形反応拡散方程式の爆発時刻

まず問題 2.1 を考える．領域を  $\Omega = [0, 1]$ ，反応項を  $f(u) = u^2$ ，初期条件を  $u^0(x) = 100 \sin(\pi x)$  とした方程式を考える：

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u^2, & (x, t) \in [0, 1] \times [0, T), \\ u(x, t) &= 0, & x = 0, 1, \\ u(x, 0) &= 100 \sin(\pi x), & x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Table 4. Aitken  $\Delta^2$  process for Eq. (3.1) with  $\alpha = 2$ .

$l$	$e_l^{(0)}$	$e_l^{(1)}$	$e_l^{(2)}$	$e_l^{(3)}$	$p_l$	steps
0	-5.936d-02					547
1	-3.044d-02				-7.143d-02	640
2	-1.542d-02	8.281d-04			1.019d+00	723
3	-7.761d-03	2.069d-04			1.010d+00	796
4	-3.893d-03	5.171d-05	4.665d-08		1.005d+00	860
5	-1.950d-03	1.293d-05	2.613d-09		1.002d+00	916
6	-9.758d-04	3.232d-06	1.528d-10	7.284d-12	1.001d+00	965
7	-4.881d-04	8.080d-07	9.212d-12	3.093d-13	1.001d+00	1008
8	-2.441d-04	2.020d-07	5.700d-13	1.665d-14	1.000d+00	1046
9	-1.221d-04	5.050d-08	4.663d-14	1.288d-14	1.000d+00	1079
10	-6.103d-05	1.262d-08	9.992d-15	7.327d-15	1.000d+00	1108

Table 5. Aitken  $\Delta^2$  process for Eq. (3.1) with  $\alpha = 3/2$ .

$l$	$e_l^{(0)}$	$e_l^{(1)}$	$e_l^{(2)}$	$e_l^{(3)}$	$p_l$	steps
0	-4.884d-01					522
1	-3.494d-01				-1.429d-01	626
2	-2.485d-01	1.826d-02			2.035d+00	724
3	-1.762d-01	6.315d-03			2.017d+00	816
4	-1.248d-01	2.210d-03	6.072d-05		2.009d+00	902
5	-8.832d-02	7.778d-04	9.580d-06		2.004d+00	982
6	-6.248d-02	2.744d-04	1.585d-06	1.042d-07	2.002d+00	1057
7	-4.419d-02	9.689d-05	2.704d-07	1.157d-08	2.001d+00	1127
8	-3.125d-02	3.424d-05	4.693d-08	1.156d-09	2.001d+00	1193
9	-2.210d-02	1.210d-05	8.217d-09	1.089d-10	2.000d+00	1255
10	-1.562d-02	4.278d-06	1.446d-09	9.948d-12	2.000d+00	1312

$e_l^{(k)} = t_l^{(k)} - T$ , where  $T$  is the blow-up time, and  $t_l^{(k)}$  is the sequence generated by the Aitken  $\Delta^2$  process.

$p_l$  is the estimate of the order of the pole (see Eq. (3.16)).

“steps” denotes the number of the steps in the DOPRI5 routine.

ここで、区間  $[0, 1]$  を  $n$  等分し、 $\Delta x (= 1/n)$  間隔の格子点での近似解を  $U_i(t) \simeq u(i\Delta x, t)$  とする。2 階導関数を中心差分を用いて近似すると

$$(4.2) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{n-2} \\ U_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1^2 \\ U_2^2 \\ \vdots \\ U_{n-2}^2 \\ U_{n-1}^2 \end{pmatrix},$$

$$U_i(0) = u^0(i\Delta x), \quad i = 0, \dots, n,$$

となる。この方程式に我々の手法を適用し爆発時刻を推定する。ここで、分割数は  $n = 64$ ,  $S_l$  は  $S_l = 2^{16} \cdot 2^l$  ( $l = 0, \dots, 10$ ) とし 4 回の加速を行った結果を Table 6 に示す。なお、DOPRI5 のパラメタは、ITOL=0, RTOL=ATOL=1.d-15 である。

Table 6. Blow-up time of Eq. (4.2) with  $n = 64$ .

$l$	$t_l^{(0)}$	$t_l^{(1)}$	$t_l^{(2)}$	$t_l^{(3)}$	$t_l^{(4)}$	$p_l$	steps
0	1.09516d-02						1569
1	1.09699d-02					-4.653d-02	1762
2	1.09774d-02	1.09827d-02				7.801d-01	1956
3	1.09804d-02	1.09824d-02				8.219d-01	2127
4	1.09816d-02	1.09825d-02	1.09825d-02			8.899d-01	2265
5	1.09822d-02	1.09826d-02	1.09822d-02			9.415d-01	2379
6	1.09824d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09823d-02		9.703d-01	2476
7	1.09826d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02		9.851d-01	2561
8	1.09826d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	9.925d-01	2636
9	1.09826d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	9.963d-01	2703
10	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	9.981d-01	2764
11	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	9.991d-01	2821
12	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	1.09827d-02	9.995d-01	2875

$t_l^{(k)}$  is the sequence generated by the Aitken  $\Delta^2$  process.

$p_l$  is the estimate of the order of the pole (see Eq. (3.16)).

“steps” denotes the number of the steps in the DOPRI5 code.

問題 2.1 において、 $f(u) = u^r$  ( $r > 1$ ),  $\Omega = [0, 1]$  の場合、Groisman and Rossi [14] は半離散化方程式の爆発レートに関して

$$\max_i U_i(t) \sim (T - t)^{-1/(r-1)}, \quad t \uparrow T$$

という結果を証明している。現在の問題では  $r = 2$  であるから  $\|U(t)\|$  は  $t = T$  に 1 位の極を持つことになる。これは Table 6 に示されている結果と一致している。

次に、このようにして計算された爆発時刻の推定値が偏微分方程式のそれに収束しているかどうかを確認するために、空間の分割を細かくして行ったときの収束状況を調べてみる。いま空間を  $n$  等分し、Aitken  $\Delta^2$  法を繰り返し適用して得られた最後の値（最終行最終列の値）を  $T_n$  とする。 $T_n$  が常微分方程式系 (4.2) の爆発時刻の十分良い近似であるとするれば、 $T_{n/2} - T_n$  は  $T_{n/2}$  の誤差を近似していることになる。そこで  $T_{n/2} - T_n$  の挙動を調べ結果を Table 7 に示す。この表





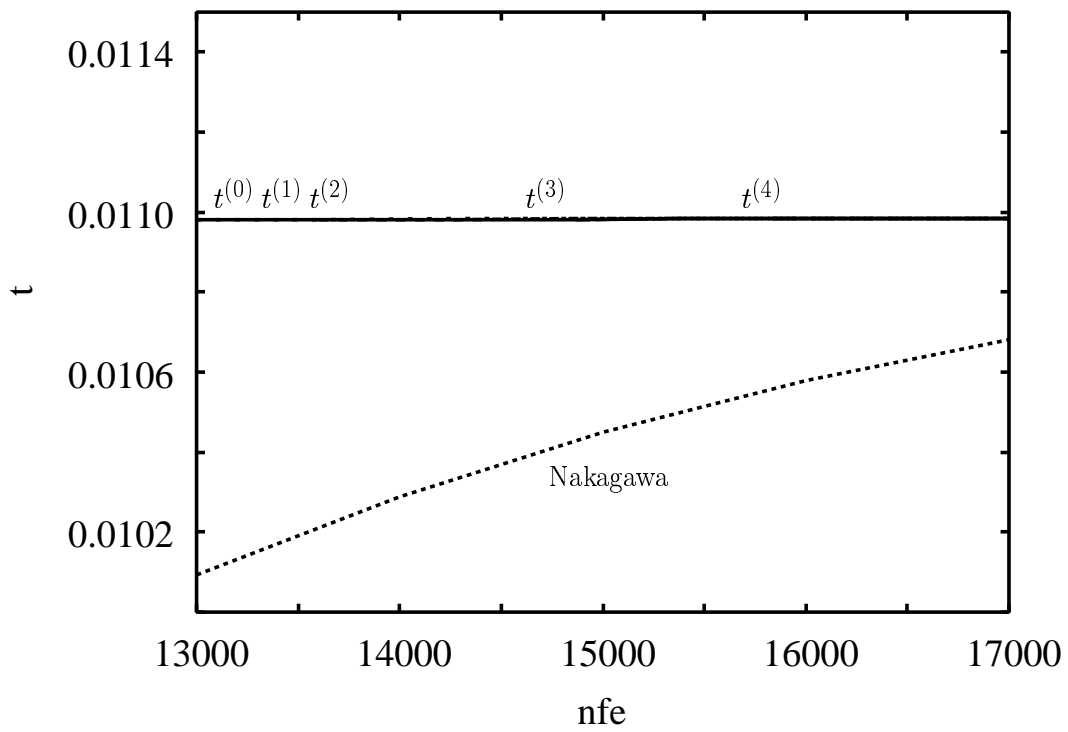


Fig. 8. Convergence to the blow-up time, where nfe denotes the number of function evaluations.

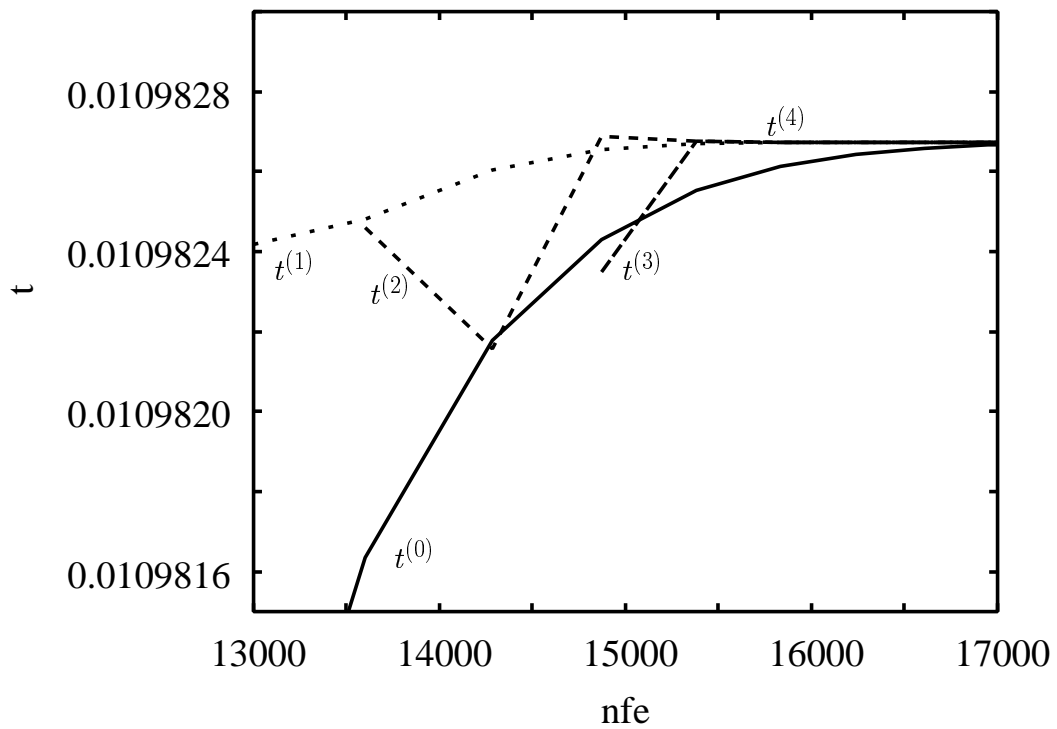


Fig. 9. Convergence to the blow-up time, where nfe denotes the number of function evaluations.

Table 8. Blow-up time of Eq. (4.4) with  $n = 64$ .

$l$	$t_l^{(0)}$	$t_l^{(1)}$	$t_l^{(2)}$	$t_l^{(3)}$	$t_l^{(4)}$	$p_l$	steps
0	1.76845d-01						12799
1	1.76898d-01					-4.255d-02	12908
2	1.76918d-01	1.76931d-01				8.752d-01	13000
3	1.76927d-01	1.76934d-01				9.329d-01	13086
4	1.76931d-01	1.76935d-01	1.76935d-01			9.649d-01	13168
5	1.76933d-01	1.76935d-01	1.76935d-01			9.820d-01	13247
6	1.76934d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01		9.908d-01	13324
7	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01		9.954d-01	13399
8	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	9.977d-01	13472
9	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	9.988d-01	13544
10	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	9.994d-01	13615
11	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	9.997d-01	13685
12	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	1.76935d-01	9.999d-01	13754

$t_l^{(k)}$  is the sequence generated by the Aitken  $\Delta^2$  process.

$p_l$  is the estimate of the order of the pole (see Eq. (3.16)).

“steps” denotes the number of the steps in the DOPRI5 code.

問題 2.2 では,  $f(u) = u^r$  ( $r > 1$ ) のとき半離散化方程式の解は漸近的に

$$\max_i U_i(t) \sim (T - t)^{-1/(r-1)}$$

を満たすことが Acosta *et al.* [4] によって示されている. したがって, 現在の問題では  $r = 2$  であるから,  $\|U(t)\|$  は  $t = T$  に 1 位の極を持つことになる. Table 8 からこの結果が数値的に確かめられる.

次に空間の分割を細かくして行ったときの収束状況を Table 9 に示す. この表より空間に関してほぼ 2 次精度が達成されていることがわかる.

Table 9. Convergence behavior of  $T_n$  to the blow-up time  $T$  of Eq. (4.4).

$n$	$T_n$	$\log_2  T_{n/2} - T_n $
16	1.8379156278398120d-01	
32	1.7856699004539611d-01	-7.58
64	1.7693533955545809d-01	-9.26
128	1.7644550486845040d-01	-11.00
256	1.7630252624552159d-01	-12.77
512	1.7626164889244569d-01	-14.58

$T_n$ : Estimated blow-up time when the mesh size is  $\Delta x = 1/n$ .

この問題では境界点で爆発することがわかっているので, Acosta *et al.* [4] が行ったように, 空間離散化後の常微分方程式系をその境界点に対応する成分を独立変数とする方程式に変換すれば比較的解きやすい方程式が得られる. このようにして得られた方程式を, やはり DOPRI5 を用いて解き,  $t$  の値を追跡して行った結果が Fig. 10 である. この図より, 加速をまったく行わない状態でも我々の方法の方が Acosta *et al.* [4] の方法より優れていることがわかる.

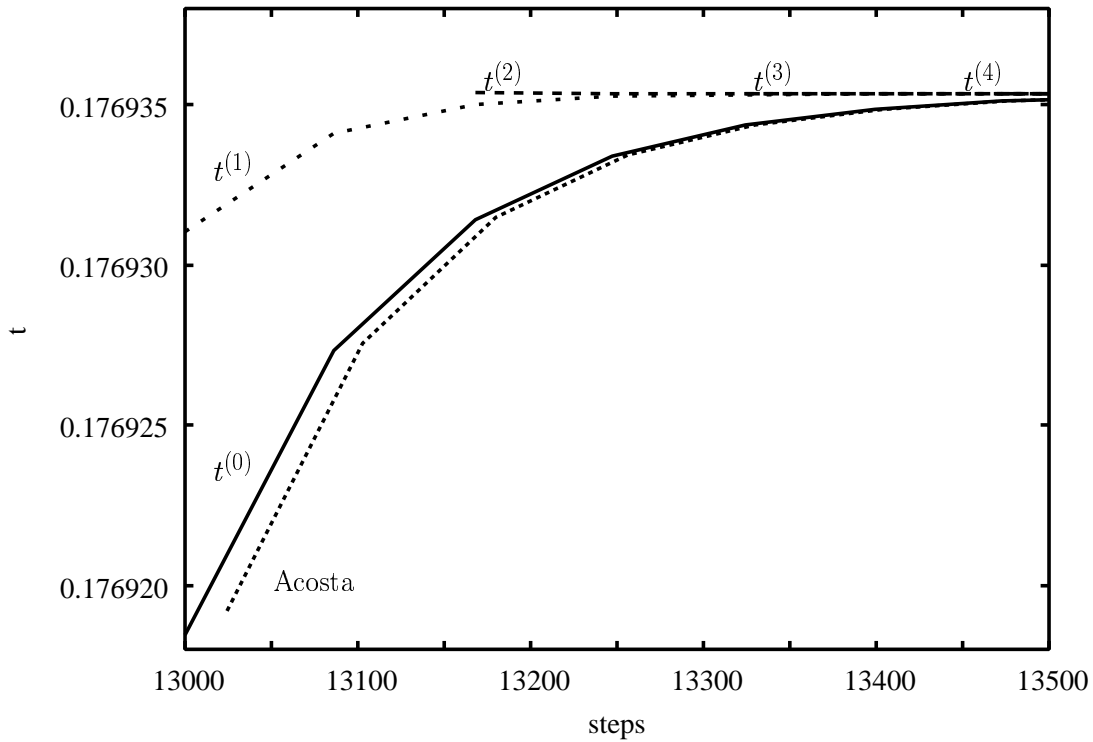


Fig. 10. Convergence behaviors of Acosta's and the present algorithms.

## 5 まとめ

本研究では，爆発解を持つ2つの問題2.1，2.2に対して爆発時刻および爆発レートを数値的に推定する方法を提案した．これらの問題に対して既存のスキームを用いることにより，爆発時刻を推定することは可能であるが，我々のスキームはより効率的であり，半離散化方程式の爆発時刻がもとの偏微分方程式のそれに収束することが保証されているならば，いかなる方程式にも適用できる．本研究の主題は爆発時刻の推定法であったが，我々が提案した方法，すなわち偏微分方程式を空間離散化して得られた常微分方程式系に森口の変換を施し，それをステップ・サイズを適応的に変更する数値解法を用いて解くという方法は，爆発解を持つ方程式の数値解を求めるのにも極めて有効である．したがって，今後の課題としては爆発解を持つより広範な偏微分方程式に対して，爆発時刻や爆発レートの推定のみならず，数値実験を通して理論的に未知な部分を明らかにしていきたい．

**謝辞** 本論文の内容に関して数学的側面から貴重なご助言を頂いた東京都立大学大学院理学研究科の岡田正己教授，および爆発問題の重要性をご教示いただいたアイシン・エイ・ダブリュ(株)/東京都立大学大学院理学研究科の井手貴範氏に感謝の意を表します．

## 参考文献

- [1] Abia, L. M., López-Marcos, J. C. and Martínez, J., Blow-up for semidiscretization of reaction-diffusion equations, Appl. Numer. Math., 20 (1996), 145–156.

- [2] Abia, L. M., López-Marcos, J. C. and Martínez, J., On the blow-up time convergence of semidiscretizations of reaction–diffusion equations, *Appl. Numer. Math.*, 26 (1998), 399–414.
- [3] Abia, L. M., López-Marcos, J. C. and Martínez, J., The Euler method in the numerical integration of reaction–diffusion problems with blow-up, *Appl. Numer. Math.*, 38 (2001), 287–313.
- [4] Acosta, G., Fernández Bonder, J., Groisman, P. and Rossi, J. D., Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition in several space dimensions, *Discr. Cont. Dyn. Sys. Series B*, 2 (2002), 279–294.
- [5] Acosta, G., Durán, G. and Rossi, J. D., An adaptive time step procedure for a parabolic problem with blow-up, *Computing*, 68 (2002), 343–373.
- [6] Bebernes, J. and Eberly, D., *Mathematical Problems from Combustion Theory*, Springer, Berlin, 1989.
- [7] Chen, Y.-G., Asymptotic behaviours of blowing-up solutions for finite difference analogue of  $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$ , *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.*, 33 (1986), 541–574.
- [8] Chen, Y.-G., Blow-up solutions to a finite difference analogue of  $u_t = u_{xx} + u^{1+\alpha}$  in  $N$ -dimensional balls, *Hokkaido Math. J.*, 21 (1992), 447–474.
- [9] Durán, R. G., Etcheverry, J. I. and Rossi, J. D., Numerical approximation of a parabolic problem with a nonlinear boundary condition, *Discr. Cont. Dyn. Sys.*, 4 (1998), 497–506.
- [10] Fatunla, S. O., *Numerical Methods for Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*, Academic Press, New York, 1988.
- [11] Fernández Bonder, J., Groisman, P. and Rossi, J. D., On numerical blow-up sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130 (2002), 2049–2055.
- [12] Friedman, A. and McLeod, B., Blow-up of positive solution of semilinear heat equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 34 (1985), 425–447.
- [13] Fujita, H., On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for  $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ , *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.*, 13 (1966), 109–124.
- [14] Groisman, P. and Rossi, J. D., Asymptotic behaviour for a numerical approximation of a parabolic problem with blowing up solutions, *J. Comp. Appl. Math.*, 135 (2001), 135–155.
- [15] Hairer, E., Nørsett, S.P., and Wanner, G., *Solving Ordinary Differential Equations I*, 2nd rev. ed., Springer, Berlin, 2000.
- [16] Henrici, P., *Elements of Numerical Analysis*, John Wiley and Sons, New York, 1964.
- [17] Lambert, J. D., *Computational Methods in Ordinary Differential Equations*, John Wiley and Sons, New York, 1973.

- [18] 森口繁一, 奥野忠一, 末包良太, 伊理正夫, 竹内啓, 生きている数学=数理工学の発展, 培風館, 東京, 1979.
- [19] Nakagawa, T., Blowing up of a finite difference solution to  $u_t = u_{xx} + u^2$ , Appl. Math. and Opt., 2 (1976), 337–350.
- [20] Quirós, F., Rossi, J. D. and Vazquez, J. L., Complete blow-up and thermal avalanche for heat equations with nonlinear boundary conditions, Comm. Partial Differential Equations, 27 (2002), 395–424.
- [21] Sanz-Serna, J. M. and Verwer, J. G., A study of the recursion  $y_{n+1} = y_n + \tau y_n^m$ , J. Math. Anal. Appl., 116 (1986), 456–464.
- [22] Straughan, B., Explosive Instabilities in Mechanics, Springer, Berlin, 1998.
- [23] Traub, J. F., Iterative Methods for the Solution of Equations, Chelsea Pub. Comp., New York, 1982.
- [24] Ushijima, T. K., On the approximation of blow-up time for solutions of nonlinear parabolic equations, Publ. RIMS Inst. Math. Sci., 36 (2000), 613–640.
- [25] Walter, W., On existence and nonexistence in the large of solutions of parabolic differential equations with a nonlinear boundary condition, SIAM J. Math. Anal., 6(1975), 85–90.

廣田 千明 (正会員) 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4

2001 年東北大学大学院情報科学研究科博士後期課程単位取得退学。修士 (情報科学)。現在, 秋田県立大学システム科学技術学部助手。数値解析の研究に従事。情報処理学会会員。

小澤 一文 (正会員) 〒 015-0055 秋田県本荘市土谷字海老ノ口 84-4

1974 年早稲田大学大学院理工学研究科修士課程修了。工学博士。仙台電波高専助教授, 東北大学大学院情報科学研究科助教授を経て, 現在, 秋田県立大学システム科学技術学部教授。数値解析 (主に, 常微分方程式, 偏微分方程式, 並列処理等) の研究に従事。情報処理学会, 日本数式処理学会, SIAM 会員。